数理解析研究所講究録
59巻 1968年 208-224

多重特性根をもつ変数係数単独高階方程式に対するCauchy問題について

阪大，理，　鹿野　忠良

§1.　序

定数係数の方程式

$$(1.1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

に対するCauchy prob. を考えると，Petrowskyの意味では勿論 well posedである。今，初期値として

$$(1.2)\qquad u(0,x)=u_0(x)\in \mathcal{D}^1_{L^2}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=u_1(x)\in L^2$$

を与えると，解として

$$(1.3)\qquad u(t,x)\in \mathcal{E}^0_t(\mathcal{D}^1_{L^2})\cap \mathcal{E}^1_t(L^2)$$

は得られない。この事実は(1.1)が2重特性根 $\lambda=0$ を持つことに由来している。

一般に，$\mathcal{B}_{x,t}$ に係数をもつ方程式

$$(1.4)\quad Lu=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u+\sum_{|\nu|+j\leqq m,\ j\leqq m-1} a_{\nu,j}(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j}u=f$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{\nu_k}$$

に対する Cauchy prob. を考えよう。

<u>定義</u> 1.1　次の 1), 2) が成立つ時, (1.4) に対する Cauchy prob. は well posed in L^2 sense という。

1) 初期 data Φ:

$$(1.5)\quad \Phi=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j}u(0,x)=u_j(x)\in \mathcal{D}_{L^2}^{m-j-1},\ 0\leqq j\leqq m-1\right\}$$

及び　$f(x,t)\in \mathcal{E}_t^0(L^2)$ に対して, $Lu=f$ をみたす, 一意的な解

$$(1.6)\quad u(x,t)\in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^{m-1})\cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{m-2})\cap\cdots\cap \mathcal{E}_t^{m-1}(L^2)$$

が　$0\leqq t\leqq T$　で存在する。

2) Energy 不等式

$$(1.7)\quad E(t:u)\leqq C_T\left(E(0:u)+\int_0^t \|f(s)\|\,ds\right)$$

が成立つ。ここに　$E(t:u)=\sum_{j=0}^{m-1}\left\|\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{j}u(t)\right\|_{m-j-1}$.

次の定理が成立つ。

<u>定理</u>　L の特性方程式

$$(1.8)\qquad \lambda^m + \sum_{|\nu|+j=m,\ j\leq m-1} a_{\nu,j}(x,t)\xi^\nu \lambda^j = 0$$

の根は，任意の real $\xi \neq 0$ に対して real，かつ重複度が一定（(x,t,ξ) に関係しない）とする。更に，(1.8) は少くとも 1 つ多重根をもつとする。この時，いかなる低階作用素 B に対しても

$$(1.9)\qquad (L_0 + B)u = f$$

に対する Cauchy prob. は not well posed in L^2 sense.

§2. Pseudo-differential operators.

1°. 次の条件 (P.1), (P.2) をみたす symbol

$$(2.1)\qquad h(x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j(x,\xi)|\xi|^{-\frac{j}{p}},$$

を考える。ここに p は正の整数である。

(P.1)　$h_j(x,\xi) \in C_\beta^{2k}$，$\beta = +\infty$，$j \geq 0$.

(P.2)　$M_{H_j} = \sum_{|\nu|\leq 2k} \sup_{x\in R^n,\ |\xi|\geq 1} \left|\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\nu h_j(x,\xi)\right|$

とおく時，$\sum M_{H_j} \varepsilon^{\frac{j}{p}}$ は，正の収束半径 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(H)$ をもつ。

さて，$\hat{\gamma}(\xi)\in C^\infty$ を次の様な函数としよう。

$$\hat{\gamma}(\xi)=\begin{cases}1 & |\xi|\geqq R+1\\ 0 & |\xi|\leqq R,\end{cases}$$

かつ，$0\leqq\hat{\gamma}(\xi)\leqq 1$。ここに $R>\varepsilon_0(H)^{-1}$.

$\hat{\gamma}(\xi)$ の Fourier 逆像 γ は 1 つの Pseudo-differential operator を与える。

さて，H_γ を

$$(2.2)\qquad H_\gamma=\sum_{j=0}^{\infty}H_j\,\gamma\,\Lambda^{-\frac{j}{p}}$$

$$H_\gamma u=\int e^{2\pi i x\cdot\xi}h(x,\xi)\hat{\gamma}(\xi)\hat{u}(\xi)d\xi$$

で定義しよう。ここに H_j は $h_j(x,\xi)$ を symbol とする特異積分作用素である。H_γ は L^2 の有界作用素を与える。H_γ を p.d.op. of type P と呼ぼう。

定義 2.1. Pseudo-differential operator H_γ が of order $-r$ であるとは，定数 C_r が存在して

$$\|H_\gamma\Lambda^r u\|\leqq C_r\|u\|$$

が成立つ時をいう。

Pseudo-differential operator of type P は，次の性質をもつ。

(1) $(H_\gamma K_\gamma - (H \circ K)_\gamma)\Lambda$ は of order zero.

(2) $\inf_{x,\xi} |h_0(x,\xi)| = \delta > 0$ とする。今 $\hat{u}(\xi) \in L^2$ が $|\xi| \leqq R\ (> \varepsilon_0(H)^{-1})$ の外に support をもつとすると

$$(2.3)\quad \| H_\gamma u \| \geqq \left(\frac{\delta}{2} - C_1 R^{-1} - C_2 \sum_{j=1}^{\infty} M_{H_j} R^{-\frac{j}{p}} \right) \|u\|$$

が成立つ。

__証明__ $\| H_\gamma u \| \geqq \| H_0 \gamma u \| - \sum_{j=1}^{\infty} \| H_j \gamma \Lambda^{-\frac{j}{p}} u \|$.

一方, H_0 は Calderón-Zygmund の特異積分作用素であるから,

$$\begin{aligned} \| H_0 \gamma u \| &= \| H_0 \Lambda (\gamma \Lambda^{-1}) u \| \\ &\geqq \frac{\delta}{2} \| \Lambda (\gamma \Lambda^{-1}) u \| - {}^{\exists}C \| \gamma \Lambda^{-1} u \| \\ &\geqq \frac{\delta}{2} \|u\| - C R^{-1} \|u\|. \end{aligned}$$

(3) $p \geqq 2$ の時. $\mathrm{Re}\, h_0(x,\xi) = 0$, $\inf \mathrm{Re}\, h_1(x,\xi) = \delta > 0$ とする。$\{\hat{u}_n(\xi)\}$ を, $|\xi| = c_1 n$, $|\xi| = c_2 n$ $(c_1 < c_2)$ なる球面で囲れる領域に support をもつ L^2 列とする。十分大きな n に対して次の式が成立つ。

$$(2.4)\quad \mathrm{Re}(H_\gamma \Lambda u_n, u_n) \geqq c\, n^{1-\frac{1}{p}} \|u_n\|^2.$$

証明. $\mathrm{Re}(H_\gamma \Lambda u_n, u_n) \geqq \mathrm{Re}(H_1(\gamma \Lambda^{-\frac{1}{p}})\Lambda u_n, u_n) - \sum_{j=2}^{\infty} \left| (H_j \gamma \Lambda^{1-\frac{j}{p}} u_n, u_n) \right|.$

一方 $$(H_1 \gamma \Lambda^{1-\frac{1}{p}} u_n, u_n) = \left([H_1, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}] \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n, u_n \right) + $$

$$+ \left(H_1 \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n \right).$$

$$\mathrm{Re}\left(H_1 \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n \right) \geqq \frac{\delta}{2} \| \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} u_n \|^2.$$

従って, $[H_1, \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}] \gamma \Lambda^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}$ が of order zero であることに注意すれば,

$$\mathrm{Re}(H_\gamma \Lambda u_n, u_n) \geqq c n^{1-\frac{1}{p}} \|u_n\|^2 - \sum_{j=2}^{\infty} \left| (H_j \gamma \Lambda^{1-\frac{j}{p}} u_n, u_n) \right|$$

を得る。右辺第2項は $c' n^{1-\frac{2}{p}} \|u_n\|^2$ で評価されるから, n を十分大きくとれば (2.4) が成立つ。.

2°. Pseudo-differential operator $\alpha_n(D)$.

$\hat{\alpha}(\xi) \in C_0^\infty(R_\xi^k)$ は, $\xi_0 \neq 0$ の近傍で恒等的に 1 であるとする。ただし $\mathrm{supp}[\hat{\alpha}(\xi)] \not\ni (\xi = 0)$. 更に $0 \leqq \hat{\alpha}(\xi) \leqq 1$ とする。 $\hat{\alpha}_n(\xi) = \hat{\alpha}(\xi/n)$ は, $n\xi_0$ の近傍で 1 である C_0^∞-函数である。Pseudo-differential operator $\alpha_n(D)$ を,

$$\alpha_n(D)u \xrightarrow{\mathcal{F}t} \hat{\alpha}_n(\xi)\hat{u}(\xi), \quad u \in L^2.$$

で定義する。 α_n は次の性質をもつ：

(1)

(2.5) $$\| x^\nu \alpha_n u \| \leqq \frac{c}{n^{|\nu|}} \|u\|.$$

(2) $h(x) \in \mathcal{B}(R^k)$ に対し

(2.6) $$[h, \alpha_n] = \sum_{|\nu|=1}^{s-1} (-1)^{|\nu|+1} \frac{h^{(\nu)}(x)}{\nu!}(x^\nu \alpha_n) + B_0,$$

ここに $\|B_0\|$ は $O(n^{-s})$, $n \to \infty$, である。

§3. 定理の証明.

1°. (1.8) の多重根を λ_1 とし，簡単のためにのこりは全て単純根としよう。 λ_1 の重複度を $p(>1)$ とすると，(1.8) は，次のようにかける。

(3.1) $$(\lambda - \lambda_1)^p \prod_{j=2}^{m-p+1} (\lambda - \lambda_j) = 0.$$

2°. 定理を証明するには，(1.9) に対する Cauchy prob. が not well posed in L^2 sense であるような低階作用素 B が，1つ存在することを示せばよい。実際，ある低階作用素 B' に対して，$(L_0 + B')$ に対する Cauchy prob. が well posed in L^2 sense であ

ると，実は任意の低階作用素に対しても同様であることが示されるからである。

3°. b を実な定数として，低階作用素

(3.2) $$B = b\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-1}$$

をとる。b をてきとうにえらべば

(3.3) $$(L_0 + B)u = 0$$

に対する Cauchy prob. は not well posed in L^2 sense であることを示そう。

4°. そのために少し準備をする。まず (3.3) を system になおす。

(3.4) $$\frac{\partial}{\partial t}U = A\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}\right)U,$$

ここに $$U = {}^t\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}u\right),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1, & & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0, & 1 \\ -a_m - b\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-1}, & -a_{m-1}, & \cdots & , & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$a_j = \sum_{|\nu|=j} a_{\nu, m-j}(x, t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\nu}.$$

次に(3.4)の localization を行う。$\beta(x)\in C_0^\infty$ を $x=0$ の近傍で恒等的に 1 である函数とする。(3.4)の左から $\beta(x)$ をかけ，更に §2 に述べた p.d.op. α_n を左から作用させる：

$$(3.5)\quad \frac{\partial}{\partial t}\alpha_n(\beta U) = A[\alpha_n(\beta U)] + [\alpha_n, A](\beta U) + \alpha_n([\beta, A]U).$$

(3.5)に p.d.op. $E_m(\Lambda)$

$$E_m(\Lambda) = \begin{bmatrix} \{i(\Lambda+1)\}^{m-1} & & & 0 \\ & \{i(\Lambda+1)\}^{m-2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

を作用させて，1階 System になおす：

$$(3.6)\quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}E_m(\Lambda)\alpha_n(\beta U) &= \\ &= E_m(\Lambda)AE_m(\Lambda)^{-1}(E_m\alpha_n(\beta U)) + \\ &+ [\alpha_n, AE_m^{-1}]E_m(\beta U) + \\ &+ \alpha_n([\beta, AE_m^{-1}]E_m U). \end{aligned}$$

<u>Lemma</u> 3.1. $[\alpha_n, AE_m^{-1}]$, $[\beta, AE_m^{-1}]$ は，p.d. op. of order zero. 特に n に関係しない定数 C が存在して

(3.7) $$\| [\alpha_n, AE_m^{-1}] \| < C.$$

5°. さて (3.6) を pseudo-differential operator を用いて表すことを考える。

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0, & i & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0, & i \\ h_m, & h_{m-1}, & \cdots & , & h_1 \end{bmatrix}$$

を，
$$\sigma(h_j) = -i\, a_j(x,t;\xi)|\xi|^{-j}$$

を symbol とする Calderón-Zygmund の特異積分作用素とする。次に

$$H_1 = \begin{bmatrix} & & 0 & \\ & & & \\ b_0, & 0, & \cdots & ,0 \end{bmatrix}$$

を
$$\sigma(b_0) = -b\, \xi_1^{m-1} / |\xi|^m$$

を symbol とする p.d. op. of type P とする。

これらを用いて (3.6) は次のように表せる：

(3.8) $$\frac{d}{dt}V_n = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1)\Lambda V_n + B_1 V_n + F_n.$$

ここに，B_1 は L^2 の有界作用素であり，更に

$$V_n = E_m(\Lambda)\,\alpha_n\,(\beta U),$$

$$F_n = [\alpha_n, AE_m^{-1}]E_m(\beta U) + \alpha_n\big([\beta, AE_m^{-1}]E_m U\big).$$

<u>Lemma</u> 3.2. n に関係しない定数 C が存在して，

(3.9) $$\| B_1 V_n + F_n \| \leqq C \, \| E_m U \|.$$

6°. 次に，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ を対角化しよう。symbol $\sigma(\mathcal{H})$ の characteristic roots を計算する。

$$\det(\lambda I - \sigma(\mathcal{H})) = \lambda^m + a_1(x.t; i\xi')\lambda^{m-1} + \cdots$$
$$\cdots + a_m(x.t; i\xi') + b\left(\frac{i\xi_1}{|\xi|}\right)^{m-1}\varepsilon = 0$$

の根を求める。ここに $\xi' = \xi/|\xi|$, $\varepsilon = |\xi|^{-1}$. $b \neq 0$ であるから，Lagrange の反転法によって，

$$(3.10)\qquad \lambda_{r,\varepsilon}=\lambda_1(x,t;i\xi')+\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{2\pi i}{p}(r-1)}\,c_n(x,t;\xi')\,\varepsilon^{\frac{n}{p}}$$

$$(r=1,2,\cdots,p)$$

を得る。ここに，$\delta>0$ が存在して，

$$(3.11)\qquad |c_1(x,t;\xi')|\geqq\delta>0.$$

全く同様に $\lambda_2,\cdots,\lambda_{m-p+1}$ の perturbed roots

$$(3.12)\qquad \lambda_{q,\varepsilon}=\lambda_{q-p+1}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^{(q)}(x,t;\xi')\,\varepsilon^{n}$$

$$(q=p+1,\ p+2,\cdots,m)$$

を得る。実は (3.10)，(3.12) は §2 に述べた (P.1) (P.2) を満し，pseudo-differential operator of type P を定義するのである。

さて

$$\sigma(N_1)=\begin{bmatrix}1, & \cdots & 1\\ \lambda_{1,\varepsilon} & & \lambda_{m,\varepsilon}\\ \vdots & & \vdots\\ \lambda_{1,\varepsilon}^{m-1}, & \cdots, & \lambda_{m,\varepsilon}^{m-1}\end{bmatrix}$$

は，$|\xi|<+\infty$ で regular である。従って $|\xi|<+\infty$ で，$\sigma(N_1)^{-1}$ は $\sigma(H)$ の diagonalizer を

与える。今 $\sigma(N_1)^{-1}$ の $|\xi|$ に関する true order を考慮して,

$$\sigma(N) = |\xi|^{\frac{1-p}{p}}\, \sigma(N_1)^{-1}$$

とおくと, $\sigma(N)$ を symbol とする p.d. op. of type P として

$$\sigma(N)\sigma(H) = \sigma(D)\sigma(N)$$

をみたす N を得る。ここに

$$D = \begin{bmatrix} R_{1,\varepsilon} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R_{m,\varepsilon} \end{bmatrix}$$

であり, $R_{j,\varepsilon}$ は $\sigma(R_{j,\varepsilon}) = \lambda_{j,\varepsilon}(x,t;\xi)$ を symbol とする p.d. op. of type P である。

§2 に定義したような γ (ただし ε_0 としては, 今は勾論 (3,10),(3,12) の収束半径によって定まるものをとる) を用いて, 次の関係に注意しよう。ここで $\equiv$ は, mod. bdd. op^s in L^2 の集合 をいみする.

$$N_\gamma H_\gamma \Lambda \equiv (N_\gamma \circ H_\gamma)\Lambda \equiv (N \circ H)_\gamma \Lambda \equiv$$

$$= (D \circ N)_\gamma \Lambda \equiv D_\gamma N_\gamma \Lambda \equiv D_\gamma \Lambda N_\gamma .$$

これより (3.8) は，次のように表せる：

$$(3.13) \quad \frac{d}{dt} W_n = D_\gamma \Lambda W_n + N_\gamma' V_n + B_2 V_n + $$
$$+ N_\gamma B_1 V_n + N_\gamma F_n ,$$

ここに $W_n = N_\gamma V_n$．また B_2 は L^2 の有界作用素，N_γ' は $-\frac{d}{dt}\sigma(N_\gamma)$ によって定義される p.d.op. である。

7°.
$$c_1(x.t:\xi') = \left(\frac{i^{p-1}\, \ell\, \xi_1^{m-1}/|\xi|^{m-1}}{\prod_{j=2}^{m-p+1} (\lambda_1 - \lambda_j)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 2$$

に注意すると，ℓ をてきとうにえらぶと，r_0 が存在して，

$$(3.14) \quad \inf \mathrm{Re}\, \exp\left(\frac{2\pi i}{p}(r_0 - 1)\right) \cdot c_1(x.t:\xi') \geqq {}^{\exists}\delta_1 > 0$$

が成立つ。　便宜上 $r_0 = 1$ としよう。

8°. $\rho_n(t) = \| W_n^{(1)}(t) \|^2$ とおこう。

n に関係しない定数 c_0, c_1 が存在して,

$$(3.15)\quad \frac{d}{dt}S_n(t) \geqq c_0 n^{1-\frac{1}{p}} S_n(t) - c_1 \|E_m U\|^2 - O(1)$$

を得る。

9°. さて, 定理の証明に入ろう。今 (3.14) が成立つように b を定めた時, 低階作用素を $B = b\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m-1}$ として, (3.3) に対する Cauchy prob. が well posed in L^2 sense であると仮定しよう。初期値として

$$u(0) = \cdots = \frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}} u(0) = 0, \ \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u(0) = \varphi_n(x)$$

を与えよう。ここに $\varphi_n(x) = \overline{\mathcal{F}}[\hat{\varphi}_n(\xi)]$,
$\hat{\varphi}_n(\xi) = \hat{\varphi}(\xi - (n-1)\xi_0)$. $\hat{\varphi}(\xi)$ は, 8°. にいった $\hat{\alpha}(\xi)$ に対して, $\mathrm{supp}[\hat{\varphi}(\xi)] \subset \{\xi : \hat{\alpha}(\xi) \equiv 1\}$, なる C_0^∞ - 函数である。

解を

$$u_n(x,t) \in \mathcal{E}_t^0(\mathcal{D}_{L^2}^{m-1}) \cap \mathcal{E}_t^1(\mathcal{D}_{L^2}^{m-2}) \cap \cdots \cap \mathcal{E}_t^{m-1}(L^2)$$

とし

$$U_n = {}^t\!\left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} u_n\right)$$

とおくと, 4° ~ 8° の議論によって U_n に対し

て (3.15) 同様の不等式がえられる。しかるに他方，
Energy不等式から，nに関係しない定数 C が存在して

$$\| E_m U_n \| < C$$

が成立つ。従って結局

$$(3.16) \qquad \frac{d}{dt} \rho_n(t) \geqq C_0 n^{1-\frac{1}{p}} \rho_n(t) - C_1 \quad , n \geqq n_0$$

がえられる

また <u>Lemma</u> 3.2 と Energy不等式から

$$\rho_n(t) < C \quad (n\text{に関係しない})$$

がわかる。

最后に，ある定数 $\delta_0 > 0$ が存在して

$$\rho_n(0) \geqq \delta_0 > 0$$

がわかる。それは，N_γ の $(1, m)$-entry を n_{1m}
とかくとき，

$$\rho_n(0) = \| W_n^{(1)}(0) \|^2 = \| n_{1m} \alpha_n(\beta \psi_n) \|^2$$

$$\geqq \left(\frac{\delta'}{2} - C_1 R^{-1} - C' \sum_{j=1}^{\infty} M_{C_j^{(1,m)}} R^{-\frac{j}{p}} \right)^2 \| \alpha_n(\beta \psi_n) \|^2$$

であり，更に

$$\|\alpha_n(\beta\psi_n)\| \geqq \|\beta(\alpha_n\psi_n)\| - \|[\alpha_n, \beta]\psi_n\|$$

$$\geqq c - O\left(\frac{1}{n}\right)$$

が §2. (2.6) からわかるからである。

こうして

$$c \geqq \rho_n(t) \geqq \delta_0 e^{c_0 n^{1-\frac{1}{p}} t} + \frac{c_1}{c_0 n^{1-\frac{1}{p}}}\left(1 - e^{c_0 n^{1-\frac{1}{p}} t}\right)$$

を得るが，$n \longrightarrow \infty$ の時，この式は $t = 0$ でなければ矛盾である。

References

[1] S. Mizohata : J. Math. Kyoto Univ. 1 (1961).

[2] J. A. Lax : C. P. A. M. 9. (1956), 135–169.

[3] M. Yamaguti : Mem. Coll. Sci. Kyoto Univ. Ser. A. 32. (1959), 121–151.

[4] T. Kano : J. Math. Soc. Japan (to appear).